

му: так, чтобы никому не казалась, что ему досталась доля меньше той, что кажется ему справедливой.

Штейнгауз знал, что для двух человек такой способ дележа существует: один человек режет пирог пополам, а другой выбирает себе ту половинку, которая ему больше нравится. Второй человек не должен обижаться — ведь он сам сделал выбор; первый тоже — если разделил не поровну, то сам виноват.

Как по-честному разделить пирог на троих?

Ответ на странице 292

## ШЕСТОЙ СМЕРТНЫЙ ГРЕХ

Это зависть, и задача в том, чтобы ее избежать. Стефан Банах и Бронислав Кнастер распространяли Штейнгаузов метод деления пирога на троих на произвольное число человек и упростили его для трех. Их работа закрыла вопрос, но потом обнаружилась одна тонкость — предложенная процедура может быть справедлива, но она не учитывает зависть. Метод свободен от зависти (беззавистлив), если никто не думает, что кому-то другому досталось больше, чем ему самому. Каждый беззавистливый метод деления справедлив, но не каждый справедливый метод деления беззавистлив. Ни метод Штейнгауза, ни метод Банаха-Кнастера не свободны от зависти.

Например, Белинда может считать, что Артур разделил пирог по-честному. Тогда метод Штейнгауза заканчивается после шага 3: и Артур, и Белинда считают, что все три куска ровно по одной трети пирога. Вольдемар должен думать, что его кусок составляет по меньшей мере  $1/3$ , так что распределение пропорционально. Но если Вольдемар видит, что доля Артура —  $1/6$ , а доля Белинды —  $1/2$ , то он будет завидовать Белинде, ведь ей достался кусок, который Вольдемару кажется больше своего собственного.

Можешь ли ты придумать беззавистливый метод деления пирога на троих?

Ответ на странице 293

## СТРАННАЯ АРИФМЕТИКА

— Нет, Генри, так не годится, — сказал учитель, указывая на тетрадь, где Генри записал:

$$\frac{1}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{18}{45}.$$

— Простите, сэр, а что не так? Я проверил на калькуляторе, ответ верный.

— Да, Генри, ответ верный, — признал учитель, — хотя лучше бы сократить на 9 и получить две пятых, это выглядит проще. Беда в том, что...

*Объясни Генри, в чем его ошибка.* А затем нашли все такие примеры двух дробей, которые при умножении способом Генри дают правильный ответ. В чисителях и знаменателях первых двух дробей должны быть однозначные ненулевые числа.

Ответ на странице 294

## КАКОЙ ГЛУБИНЫ КОЛОДЦЕЦ?

В одном эпизоде сериала «Команда времени»<sup>19</sup> неутомимые археологи хотят измерить глубину средневекового колодца. Они бросают в него какой-то предмет и засекают, сколько времени тот падает. Оказалось, поразительно много — целых шесть секунд. Кажется, что таращенье падающего предмета длится целую вечность. Археологи оказались в опасной близости к вычислению глубины колодца с помощью ньютоновских законов движения, но в последний момент сдались и прибегли к помощи трех очень длинных мерных лент, связанных вместе. Ученые чуть не воспользовались формулой

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

<sup>19</sup> «Команда времени» (*Time Team*) — британский телесериал. В каждой его серии показана работа команды археологов, которые проводят раскопки, а ведущий объясняет смысл их работы неспециалистам. В каждой серии место раскопок новое. — Прим. перев.

где  $s$  — расстояние, пройденное под действием силы тяжести из положения покоя, а  $g$  — ускорение свободного падения. Эта формула не учитывает сопротивления воздуха. Галилео Галилей получил ее экспериментально, а Исаак Ньютона позднее обобщил для описания движения тел под действием произвольной силы. Можно приблизенно считать, что  $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$  (метров в секунду за секунду). Какой глубины колодец?

Как у команды времени, у тебя есть три дня на вычисления.

Ответ на странице 295

## КВАДРАТЫ МАК-МАГОНА

Эту головоломку придумал специалист по комбинаторике П. А. Мак-Магон в 1921 году. Он размышлял о квадрате, разделенном диагоналями на четыре треугольника. Его интересовал вопрос, сколько способами можно раскрасить такой квадрат, если есть краски трех цветов. Оказалось, что если считать одинаковыми раскраски, которые совпадают при поворотах и отражениях, то получается всего 24 способа. Найди их все.

Все таким образом раскрашенные 24 единичных квадрата можно разместить в прямоугольнике размером  $6 \times 4$ . Можешь ли ты сложить их в такой прямоугольник так, чтобы соприкасающиеся треугольнички соседних квадратиков были одного цвета, а также весь периметр прямоугольника был одноцветным?

Ответ на странице 295

## ЧТО ТАКОЕ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ МИНУС ЕДИНИЦЫ?

Квадратный корень из данного числа — это такое число, квадрат которого равен данному. Например, квадратный корень из 4 равен 2. Если допустить отрицательные кор-

ни, то  $-2$  — это второй корень из 4, потому что минус на минус дает плюс. Плюс на плюс тоже дает плюс, поэтому квадрат любого числа — положительного или отрицательного — положителен. Похоже, что у отрицательных чисел, в частности у  $-1$ , не может быть квадратных корней.

Несмотря на это, математикам (а также физикам с инженерами, да и всем, кто работает в естественных науках) удобно наделить минус единицу квадратным корнем. Это не число в обычном смысле слова, поэтому оно получило новое обозначение:  $i$ , если ты математик, и  $j$  — если инженер.

Квадратные корни из отрицательных чисел появились в математике около 1450 года в алгебраических задачах. В те дни идея была головоломной, потому что люди представляли себе числа как нечто реальное. Даже отрицательные числа приводили к недоразумениям, но все к ним быстро привыкли, когда поняли, насколько они полезны. Примерно та же история произошла с  $i$ , только заняла гораздо больше времени.

Один из трудных вопросов — как изобразить  $i$  геометрически. С понятием числовой прямой все свыклись — это бесконечная линейка, справа на ней положительные числа, слева, отрицательные, между целыми числами — дроби (рис. 122).

Все вместе эти знакомые числа стали называться действительными, потому что они точно соответствовали физическим величинам. Ты можешь увидеть 3 коровы или 2,73 килограмма сахара.

Но для «нового» числа  $i$  на действительной числовой прямой места не было. Со временем математики поняли, что *оно не обязано на ней размещаться*. Раз это новый вид чисел, для него нужно найти *новое место*. Его поместили на другую прямую, перпендикулярную действительной (рис. 123).

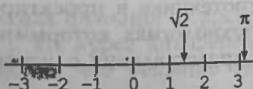


Рис. 122. «Действительная» числовая прямая

4. Если Белинда пасует на шаге 2, то обрезков нет и решение получено. В противном случае Белинда или Вольдемар получает обрезанный кусочек. Назовем этого человека нерезчиком, а второго из этой пары — резчиком. Резчик делит остатки на три части (которые считает равными). У Артура есть «безоговорочное преимущество» перед нерезчиком в следующем смысле. Нерезчик получает урезанный кусочек, и, даже если ему достанутся все обрезки, Артур все еще не будет завидовать, считая, что обладает справедливой долей, ведь он изначально считал разрезание честным. Как ни дели обрезки, Артур не будет завидовать нерезчику.
5. Три кусочка обрезков игроки выбирают в таком порядке: нерезчик, Артур, резчик. Каждый выбирает наибольший или один из равных наибольших, если их несколько, среди всех доступных. Нерезчик выбирает первым, поэтому никому не завидует. Артур не завидует ему из-за своего безоговорочного преимущества, не завидует и резчику — ведь тот выбирает последним. Резчик тоже никому не завидует, ведь он сам делил обрезки.

Не так давно Стивен Брамс, Алан Тейлор и другие построили очень сложные беззавистливые методы деления для любого числа игроков.

Мой жизненный опыт говорит, что когда дело идет о дележе пирогов, сложнее не впасть в другой смертный грех — чревоугодие.

## СТРАННАЯ АРИФМЕТИКА

Результат-то верен, хотя, как сказал учитель, лучше бы сократить его на 9 и получить  $\frac{2}{5}$ . Но вот метод оставляет желать лучшего. Например, вычисления

$$\frac{3}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{38}{45}$$

неверны.

А когда же метод дает верный ответ? Простой способ получить еще одно решение — перевернуть пример Генри:

$$\frac{4}{1} \times \frac{5}{8} = \frac{45}{18}.$$

Но есть и другие решения. Если мы придерживаемся ограничения на число цифр, то должны решить уравнение

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{10a+c}{10b+d},$$

которое сводится к уравнению

$$ac(10b+d) = bd(10a+c).$$

Здесь буквы  $a, b, c$  и  $d$  обозначают любую цифру от 1 до 9 включительно.

При  $a=b$  и  $c=d$  получаем тривиальные решения, их 81. Но есть еще 14 решений:  $(a, b, c, d) = (1, 2, 5, 4), (1, 4, 8, 5), (1, 6, 4, 3), (1, 6, 6, 4), (1, 9, 9, 5), (2, 1, 4, 5), (2, 6, 6, 5), (4, 1, 5, 8), (4, 9, 9, 8), (6, 1, 3, 4), (6, 1, 4, 6), (6, 2, 5, 6), (9, 1, 5, 9)$  и  $(9, 4, 8, 9)$ . Они разбиваются на семь пар  $(a, b, c, d)$  и  $(b, a, d, c)$ , соответствующих перевернутым дробям.

## КАКОЙ ГЛУБИНЫ КОЛОДЕЦ?

Глубина колодца составляет

$$s = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (6)^2 = 180 \text{ метров} = 590 \text{ футов},$$

и этот результат хорошо согласуется с тем, который получила команда времени (около 550 футов), особенно если учесть, как сложно измерять без приборов время падения. Можно для  $g$  взять более точное значение —  $9,8 \text{ м/с}^2$ , тогда получится глубина в 176 метров, или 577 футов. Видимо, точное время было немного меньше 6 секунд.

Да, колодец действительно оказался настолько глубоким. Как же его выкопали 200 лет тому назад? Вот это настоящая загадка.

## КВАДРАТЫ МАК-МАГОНА

Все 24 квадратика можно расположить так, как показано на рис. 196. Есть 17 других решений плюс те, что получаются из них поворотами и отражениями.