Как видно из рис. 7.1, есть шесть *особых случаев:* $N + 1 = 6$. В состояние *ошибка в угадывании* ведут шесть траекторий, вероятность перехода по каждой из которых равна $1/2^5 \times 1/2 = 1/2^6 = 0{,}0156$. То есть вероятность ошибки (False) равна $p_F = 6/2^6 = 0{,}09375$, а вероятность, что алгоритм согласованных действий работает, то есть вероятность совпадений (True) в называемых игроками числах равна $p_T = 1 - 6/2^6 = 0{,}90625$.

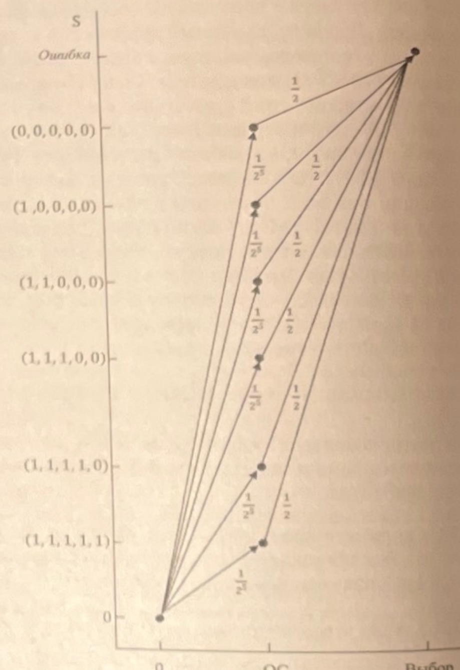


**Рис. 7.1.** Шоу «Передача мыслей на расстоянии». Диаграмма переходов для определения вероятности ошибки игроков в угадывании одинаковых значений в последовательности из 10 членов со случайными значениями 0 или 1



Значение $p_T = 0{,}90625$ существенно больше вероятности одной второй, характерной для случайного угадывания, и это воспринимается зрителями как чудо, если в этот эффект верят, или как обман и мошенничество, если не верят. В последнем случае зрители начинают искать тайные пути передачи информации между «экстрасенсами». Требуют при этом, чтобы информация между «экстрасенсами» передавалась не голосом, а на бумаге. Наушники надевают на «экстрасенсов» и т. д. То есть при правильном исходном предположении о передаче информации борются с формой, а не с источником передачи информации.

Отметим, что при увеличении длины случайной последовательности $N$ вероятность ошибки $p_F = (N + 1)/2^{N+1}$ падает, а вероятность совпадения $p_T = 1 - (N + 1)/2^{N+1}$ растет, приближаясь к единице.

*Для особо внимательных читателей. Замечание* 1. При реализации *особого случая* первый игрок не должен указывать позицию, на которой в последовательности происходит переход 1 0, так как, действуя в соответствии с алгоритмом, второй игрок с вероятностью единица назовет неправильное значение.

*Для особо внимательных читателей. Замечание* 2. Зрители быстро могут сообразить, что игрок 2 называет позицию, соседнюю с той, что назвал игрок 1, и заподозрить неладное. От этого недостатка легко избавиться. Для этого позицию перехода 0 1 можно передавать в зашифрованном виде. Схема шифрования может быть простейшей. Например, повторяющийся через четыре такта сдвиг на 2, 3, 4, 5. В частности, если переход 0 1 происходит на позициях 3/5, то первый игрок называет не позицию 4, а позицию со сдвигом $4 + 2 = 6$. После этого игрок 2 называет позицию 3 либо позицию 5 в зависимости от того, 0 или 1 у него на позициях, соседних с позицией 4.

Другой пример существенного изменения вероятностей в результате получения дополнительной информации связан с популярным шоу на американском телевидении.

## 7.3. Парадокс Монти Холла

*Люди, делая какой-то выбор, всегда жалеют о том решении, которое приняли.*

Г. Рейдерс

В 1975 году Монти Холл, ведущий популярного игрового телешоу «Давайте заключим сделку» (в оригинале — *Let's make a deal*), предлагал участнику угадать, за какой из трех дверей (порталов) спрятан ценный приз (автомобиль).

После того как участник указывал на одну из дверей, например на дверь № 1, ведущий, который знал, где находится приз, открывал одну из двух оставшихся дверей, за которой не было приза, например дверь № 3. После этого он предлагал игроку либо сохранить свой выбор, либо изменить его на дверь № 2.

Обсуждение оптимальной стратегии действий игрока «*держать*» или «*менять*» стало предметом бурных дискуссий, в которых принимали участие ученые математики и теоретики. Дебаты длились не один год. В журнале «Parade» в 1990 году вышла статья. В ней впервые появился термин «*парадокс Монти Холла*». После этого именно так стали называть загадку телешоу.

Перейдем к объяснению «*парадокса Монти Холла*» и обоснованию оптимальной стратегии для игрока.

Выбор первой двери игроком является случайным. Информация о том, что за дверью есть автомобиль, — отсутствует. Все двери остаются закрытыми, пока ведущий не откроет свою дверь. В этот момент появляется дополнительная информация. Вероятности изменяются. Это необходимо использовать. Теперь следует исключить интуицию и прибегнуть к диаграммной технике.

На рис. 7.3 показана диаграмма переходов для случая, когда игрок на втором шаге не меняет свой выбор. Состоянию системы $S_V$ соответствует выбор приза (англ.: *victory — победа*), а $S_F$ – проигрыш (англ.: *false* — ложный). При первом выборе можно указать на дверь с призом с вероятностью 1/3, а на дверь с проигрышем

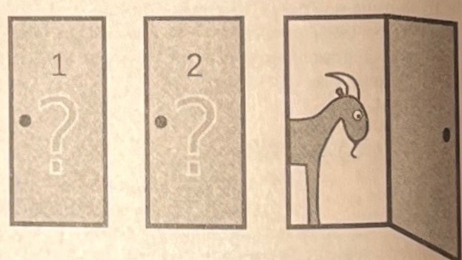


Рис. 7.2. Иллюстрация к парадоксу Монти Холла



с вероятностью 2/3. Для придания зрелищного эффекта за двумя дверями, которым соответствовал проигрыш, располагались козы. Соответственно переходу $(A \to B)$ в состояние $S_V$ — приз на рис. 7.3 соответствует траектория с вероятностью перехода 1/3, а переходу $(A \to C)$ в состояние $S_F$ — проигрыш (коза) соответствует траектория с вероятностью 2/3.

Если игрок не меняет свой выбор на шаге 2, то он с вероятностью 1 остается в том состоянии, в котором он оказался после шага 1. То есть второму шагу соответствуют процессы $(B \to V)$ и $(C \to F)$, обозначенные на рис. 7.3 горизонтальными стрелками с вероятностью перехода, равной 1.

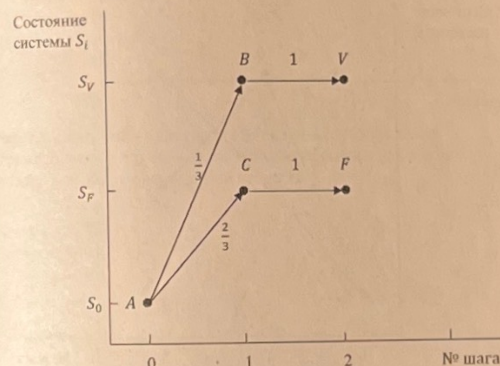


**Рис. 7.3.** Диаграмма переходов для парадокса Монти Холла при сохранении игроком первоначального выбора (стратегия «*держать*»)

Таким образом, при стратегии «*держать*» (не менять выбор на втором шаге) вероятность получить приз равна 1/3, а проиграть 2/3.

На рис. 7.4 показана диаграмма переходов для стратегии, при которой игрок на втором шаге изменяет свой выбор. При этом на первом шаге все остается баз изменений.

Интерес представляет второй шаг. Если на первом шаге игрок выбрал приз, то очевидно, что при изменении выбора на втором шаге он с вероятностью 1 переходит в состояние $F$. Переходу $B \to F$ на рис. 7.4 соответствует процесс с вероятностью 1 ведущий из состояния «приз» в состояние «коза».

Если на первом шаге игрок выбрал дверь без приза, то остаются две двери. За одной из них коза, а за второй приз. Монти, знающий, что находится за этими дверями, открывает дверь, за которой находится коза, а закрытой остается дверь с призом. Поэтому при неправильном первоначальном выборе и при изменении выбора на втором шаге игрок с вероятностью 1 получает приз. Этому переходу на рис. 7.4 соответствует процесс $C \to V$, с вероятностью 1 ведущий из состояния «коза» в состояние «приз».

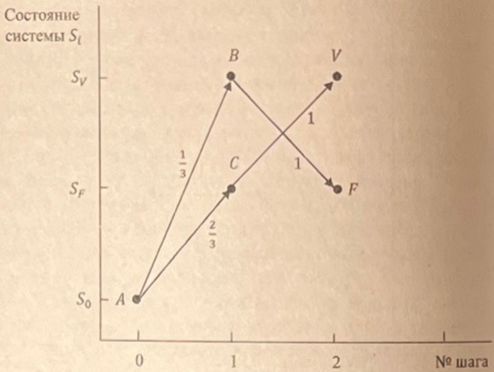


**Рис. 7.4.** Диаграмма переходов для парадокса Монти Холла при изменении игроком выбора на втором шаге (стратегия «*менять*»)

Поэтому при стратегии «*менять*» вероятность получить приз равна 2/3, а проиграть 1/3.

Особенно очевидной выигрышность стратегии «*менять*» становится при рассмотрении случая с 10 дверями, за одной из которых находится приз, а за 9 остальными козы. Первоначальный выбор происходит на шаге 1. На втором шаге открываются 8 дверей с козами, и игроку предлагается поменять или сохранить свой выбор. Диаграммы переходов для этого случая показаны на рис. 7.5 и 7.6. Сделать правильный выбор на первом шаге можно с вероятностью 1/10. С вероятностью 9/10 выбор будет ошибочным.



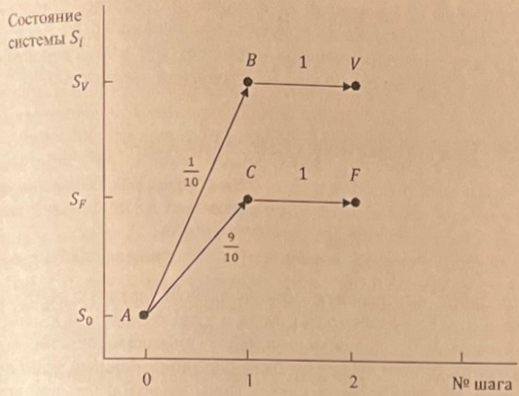


**Рис. 7.5.** Диаграмма переходов для парадокса Монти Холла при сохранении игроком первоначального выбора (стратегия «*держать*»). Количество дверей равно 10

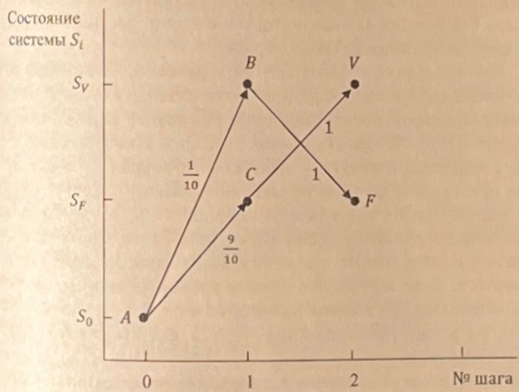


**Рис. 7.6.** Диаграмма переходов для парадокса Монти Холла при изменении игроком выбора на втором шаге (стратегия «*менять*»). Количество дверей равно 10. Количество открываемых дверей равно 8

Для случая с 10 дверями, из которых открывается 8, при стратегии «*менять*» вероятность получить приз равна 9/10, а проиграть 1/10. То есть стратегия «*менять*» позволяет увеличить вероятность выигрыша в 9 раз по сравнению со стратегией «*держать*».

## 7.4. Как математики обыграли казино

*Меня напрягают не должники. Есть одна вещь хуже этого. Тот, кто никогда не проигрывает.*

Фильм «Ошибка времени»

Построить выигрышную стратегию, позволяющую обыгрывать казино в рулетку, невозможно. Хотя в художественной литературе случай, связанный с получением и использованием дополнительной информации, описан в рассказе Джека Лондона «Малыш видит сны».

Герой рассказа золотоискатель Смок заметил, что при игре в рулетку на столе, который стоял около камина, последующий выигрышный номер часто выпадает напротив предыдущего выигрышного номера. Это наблюдение позволило ему несколько дней подряд систематически выигрывать, что привело в растерянность и ярость владельцев казино, которым в конце рассказа он продал свою, если можно так сказать, «систему».

С математической точки зрения у рулетки, за которой играл Смок, числа выпадали с равной вероятностью, но была не идеальной матрица вероятностей перехода, см. раздел 6.5 «*Матрица вероятностей перехода для идеальных и неидеальных объектов*».

Для «идеальной рулетки» предыстория выпавших цифр не является источником дополнительной информации, если нет изъяна в матрице вероятностей перехода или если не удается «расколоть» алгоритм формирования псевдослучайных чисел для *on-line* казино. Хотя с *on-line* казино и с *on-line* азартными играми лучше не связываться. Если в обычном казино крайне редко, но возможна «*нечестная игра*» со стороны казино, то в *on-line* казино это легко сделать на алгоритмическом уровне, так как ставки игроков известны программе.

Однако при игре в казино с дилером и игроками в карты есть масса дополнительной информации, которая носит вероятностный характер. Если отбросить психологические эффекты и физиогномику (чтение по лицу), то на первый план в качестве абсолютно



легального источника дополнительной информации выходят карты, вышедшие из колоды в ходе игры.

Вышедшие карты меняют вероятность появления последующих карт. Например, если из колоды вышли все тузы, то после этого вероятность появления туза равна нулю.

Использование дополнительной информации позволило Эдварду Торпу[3] (англ.: *Edward Oakley Thorp*) разработать систему подсчета вышедших карт при игре в блэкджек, которая после ряда крупных выигрышей Торпа и членов его команды в ряде казино заставила изменить правила игры в блэкджек. Система, основанная на подсчете вышедших карт, описана в книгах «Победи дилера» [7.3] и «Математика азартных игр» [7.4]. В основе системы лежит понятие сбалансированной колоды. Первоначальная колода сбалансирована. Если из колоды выходят преимущественно младшие карты 2, 3, 4, 5, 6, то колода разбалансируется в плюс. Эта система и в наше время используется профессионалами и любителями, но с измененными казино правилами (увеличением числа перемешиваемых колод, из которых сдаются карты) эффективность применения системы существенно снизилась.

### Правила игры в блэкджек[4]

Цель игры в блэкджек — обыграть дилера (крупье казино), набрав больше очков, чем он, и не превысив 21 очко.

Каждая карта с цифрами дает количество очков, равное ее номиналу: от двойки до десятки — соответственно от 2 до 10 очков. При этом туз дает 1 или 11 очков (11, пока общая сумма не больше 21, далее 1), *картинки* (называемые на английском также *face cards* — буквально «лица») — король, дама, валет — 10 очков.

Игроки делают свои ставки до раздачи карт дилером. После сдачи первой карты игрокам нельзя делать ставки, а также трогать свои фишки.

---

[3] Эдвард Торп (англ. Edward Oakley Thorp; 14 августа 1932 года, Чикаго, США) — американский профессор математики, игрок и теоретик блэкджек. По совету Клода Шеннона начал практически применять подсчет вышедших карт в блэкджеке. Сфера научных интересов: теория вероятностей, линейные операторы. Преподавал в Массачусетском технологическом институте и Калифорнийском университете. Работал в Bell Labs. В сотрудничестве с Клодом Шенноном создал первый переносной компьютер.

[4] Текст составлен по материалам Википедии. https://en.wikipedia.org/wiki/Blackjack, CC BY-SA 3.0.