

§ 2. КРАТКАЯ ИСТОРИОГРАФИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА СМЕКАЛКУ

Процесс возникновения, развития и непрерывного пополнения внеучебных задач типа «математических развлечений» сопутствует общему процессу развития математики, в первую очередь арифметики и геометрии, а также и процессу развития педагогики.

Однако историки математики и историки педагогики до сих пор еще не проявили специального интереса к вопросам истории и эволюции обширной группы математических развлечений.

Игнорирование летописцами событий, относящихся к математическим развлечениям, привело к утрате ряда фактов. Так, в частности, остается неизвестным подлинное авторство некоторой части классических задач из серии математических развлечений, вечно возбуждающих умы и взрослых и подростков.

Не претендуя даже на приближенную полноту историко-литературных изысканий в области математических развлечений, попытаемся лишь проложить тропинку в этот своеобразный мир задач-смекалок для более отчетливого выявления их жизнеспособности и педагогического своеобразия, их места в системе упражнений, развивающих математическую инициативу.

КЛАССИЧЕСКОЕ НАСЛЕДИЕ

Зарождение математических задач-смекалок относится к той же далекой древности, как и зарождение математической науки. Истоки их — в старинных коллекциях проблем, пришедших к нам из Египта, от греков, арабов, индийцев, из древнего Китая.

Ненасытная человеческая любознательность, жажда умственной деятельности и интерес к необычайному и курьезному, а также привлекательность и сила педагогического воздействия, присущие математическим задачам на смекалку, обусловили их жизнеспособность.

Действительно значительная часть коллекции математических задач-смекалок оказалась весьма долговечной, переходит из поколения в поколение в своем первоначальном облике или в легко распознаваемых вариантах.

Усилиями одаренных людей со временем «распутывались» отдельные головоломки, обосновывались игры, задачи получали исчерпывающее решение. И если иные задачи теряли при этом смысл головоломок или игр и выпадали из коллекции таких задач, то другие, наоборот, лишь приобретали дополнительную остроту и новый смысл, становясь теоремами иной раз со столь своеобразным доказательством, что не бесполезно и разобраться в нем, а может быть попытаться и самому «открыть».

Коллекция математических задач-смекалок создавалась творчеством огромного количества людей: математиков-ученых, педагогов, любителей. «Сокровищница» коллекции хранит дары Леонардо Пизанского (Фибоначчи), Кардано, Тарталья, Ферма, Лейбница, Эйлера, Монжа, Гаусса, Гамильтона и др.

Леонардо Пизанский (1170—1250). Итальянский купец-математик и блестящий вычислитель XIII в., победитель публичных состязаний в наиболее быстром и оригинальном решении трудных задач. Коллекция проблем, относящихся к математической смекалке, пополнилась большим количеством задач, связанных с любопытной числовой последовательностью («Числа Фибоначчи»), найденной Леонардо Пизанским. Богатство и разнообразие свойств этой последовательности до сих пор продолжают привлекать к себе умы любознательных людей.

Джeronимо Кардано (1501—1576). Выдающийся представитель науки эпохи Возрождения (XVI в.), отчаянный игрок и скандалист, но талантливый математик, легко решавший задачи, перед которыми отступали другие, — один из своих 222 трактатов специально посвятил играм, требующим сообразительности и ловкости.

От Кардано, в частности, впервые узнали в Европе и об игре «Меледа», комбинационные возможности которой лишь немногим уступают шахматам.

Никколо Тарталья (1500—1557). Еще один крупнейший представитель эпохи Возрождения; человек несокрушимой энергии и большого таланта; из-за бедности был вынужден в юности писать свои вычисления не на бумаге, а на кладбищенских могильных плитах. Он самоучкой овладел математическими знаниями; прославил себя победой в математическом турнире 1535 г. и открытием формулы для решения кубического уравнения. Уделил внимание между прочим выяснению математической сущности задач «на считалочку»¹ (облекая решение в форму стихов на итальянском языке), на дележи вина путем переливания, на переправы и т. д.

Пьер Ферма (1601—1665). Юрист, советник парламента одной из провинций Франции. Лишь в часы досуга имел возможность отдаваться любимому занятию — математическим исследованиям и решению труднейших задач. Ферма, как известно, является не только одним из создателей аналитической геометрии и теории вероятностей, но также и основоположником современного направления теоретико-числовых изысканий и вытекающих отсюда увлекательных числовых головоломок.

Кроме того, в 1638 г., в письме к Декарту, Ферма изложил элементарно-аналитическое доказательство геометрической теоремы о том, что из всех прямоугольников данного периметра квадрат имеет наибольшую площадь.

С небольшими изменениями это доказательство обычно и излагается в книгах, предназначенных для лиц, не знакомых еще с дифференциальным исчислением (например, в книге Я. И. Перельмана «Занимательная геометрия»).

Готтфрид-Вильгельм Лейбниц (1646—1716). Математик и философ, юрист, языковед и дипломат, создатель новых отраслей и новых мощных методов математической науки, он, в частности, одним из первых обратил внимание на принципиальные достоинства двоичной системы счисления, предугадал ее богатую будущность.

Двоичная система действительно оказалась удобной в серьезных математических исследованиях (а в

¹ Если вместе с играющими встать «в круг» и по счету выключать из «круга» каждого n -го, то с кого надо начать счет, чтобы самому остаться не выключенным?

наше время нашла себе применение в качестве одного из принципов действия электронно-вычислительных машин), она была впоследствии использована математиками для построения теории целого ряда математических игр, таких, например, как угадывание взятых тремя лицами предметов, Ханойская башня, фан-тан, меледа, обобщенная задача о наименьшем числе гирь, достаточном для взвешивания любого груза, вес которого заключен в промежутке целых чисел от 1 до n (см., например, Я. Успенский, Избранные математические развлечения, 1924).

Характерен взгляд Лейбница на игры и развлечения. В первом томе «Мемуаров Берлинской академии наук» (1710) помещена работа Лейбница под заглавием «*Annotatio de quibusdam ludis*» («Примечания к некоторым играм...»), в которой он пишет:

«Мы часто замечали, что люди проявляют более всего изобретательности в играх, и поэтому математические игры заслуживают внимания, не сами по себе, а потому, что развивают находчивость».

Позднее, в письме к Монмору от 17 января 1716 г., Лейбниц замечает: «Игра, называемая солитером, мне очень понравилась. Но я предпочел воспользоваться ею в обратном смысле, т. е. вместо того чтобы разделять данную фигуру, заставляя перескакивать один шарик через другой в пустую лунку и снимая этот последний, я нашел, что гораздо интереснее восстанавливать то, что было разделано, помещая шарик в ту лунку, чрез которую он перескакивает; при таком способе можно составить какую угодно из предложенных фигур, если только ее удалось предварительно разделить.

— Но для чего все это? — спросят меня.

— А для того, — отвечу я, — чтобы усовершенствовать изобретательность, потому что необходимо иметь способы осуществлять на деле то, что можно найти путем размышления»¹.

В другом случае Лейбниц пишет: «... даже игры, как требующие ловкости, так и основанные на случайности, дают громадный материал для научных занятий. Мало того, самые обыкновенные детские забавы могли бы

¹ Э. Люкас, Математические развлечения, Спб., 1833, стр. 76.

остановить на себе внимание величайшего математика»¹.

Леонард Эйлер (1707—1783). Величайший из математиков XVIII в. Л. Эйлер, всеобъемлющему гению которого обязаны очень многие отрасли математической науки, также обратил свое внимание на разнообразные детские и недетские «забавы». В его трудах — и решение топологической задачи о Кенигсбергских мостах, все еще вызывающей неизменный интерес у любителей математики, и новый вклад в теорию магических квадратов. С магическими квадратами тесно связаны латинские и Эйлеровы квадраты. Размещение n различных букв латинского алфавита на n^2 полях квадрата так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце квадрата образовалась перестановка из n данных букв, Эйлер назвал латинским квадратом. Два латинских квадрата, наложенных друг на друга, образуют квадрат Эйлера, если никакие соответствующие поля не содержат одинаковых букв.

Задаче на составление одного из таких квадратов (6×6) Эйлер придал следующую занимательную форму: 36 офицеров шести различных званий и шести различных родов войск должны быть расставлены в форме квадрата так, чтобы каждая ортогональ (столбец, ряд и главные диагонали) содержала шесть офицеров различных званий и различных родов войск.

Поиски решения этой задачи оказались тщетными. Возникло предположение о невозможности составления Эйлерова квадрата шестого порядка (т. е. состоящего из 6×6 ячеек), что впоследствии и было доказано математиком Тарри (Tarry).

Скромная задача о «считалочке», механический способ решения которой в сущности доступен даже детям, как оказалось, имеет далеко не простое объяснение рациональных способов ее решения. Именно Эйлер дал первое полноценное решение проблемы о «считалочке». Благодаря Эйлеру получила широкое распространение и обогатилась математическим содержанием серия задач на «ход шахматного коня». Эйлеру принадлежит первое обоснование возможности построить «замкнутый двойной ход конем», т. е. обойти конем сначала все

¹ Э. Люкас, Математические развлечения, Спб., 1883, стр. 5.

клетки верхних четырех строк шахматной доски, а затем все клетки нижних четырех строк и вернуться в исходную позицию.

Гаспар Монж (1746—1818) — французский геометр, организатор национальной обороны республики после победы революции во Франции. Г. Монж известен как создатель конструктивной начертательной геометрии. Его основные труды посвящены геометрическим методам изображения предметов на плоскости. Заинтересовавшись математической стороной карточной игры, Г. Монж разработал своеобразную теорию тасовки колоды игральных карт.

Карл-Фридрих Гаусс (1777—1855). Имя К.-Ф. Гаусса — титана математической мысли XIX в., в равной мере делившего свое дарование между анализом, алгеброй, астрономией, теоретической физикой и теорией чисел, — связано также с исследованием решения интереснейшей задачи о размещении восьми ферзей (королев) на пустой шахматной доске так, чтобы ни одна фигура не была под ударом какой-либо из остальных фигур и об определении наибольшего числа возможных решений.

Уильям Гамильтон (1805—1865). Английский математик У. Р. Гамильтон оставил коллекции математических задач на смекалку, две головоломки в нескольких вариантах: «путешествие по додекаэдру» и «путешествие по икосаэдру». Смысл этих задач заключается в следующем. Путешествие по додекаэдру: двигаясь по ребрам додекаэдра, пройти через 20 вершин его и, пройдя каждую один лишь раз, вернуться к исходному пункту. Путешествие по икосаэдру: посетить 20 граней, но каждую грань лишь один раз, причем переход от одной грани к соседней должен совершаться непременно через их общее ребро. Гамильтон ставит для первой задачи дополнительное условие: первые пять станций могут быть наперед указаны. В этом случае задача имеет два или четыре различных решения.

ПЕРВЫЕ ОТДЕЛЬНЫЕ СБОРНИКИ ЗАДАЧ

Работа Алькуина. Одна из первых успешных попыток отбора задач типа математической смекалки, разбросанных по отдельным папирусам, трактатам, ма-

нускриптам и циркулирующих в устной передаче, относится к VIII в. Имеется в виду рукописный манускрипт «Propositiones ad acuendos juvenes» («Предложения для изоощрения ума юношества»), автором которого историки считают Алькуина (Alcuin) из Йорка (775). Сохранилась запись этого сочинения, датированная 1000 годом¹.

Работа Баше де Мезириака (C.-G. Bachet de Méziriac). Если не было что-нибудь утеряно, то следующая значительная работа по собиранию и селекционированию задач типа математической смекалки была выполнена лишь много веков спустя, в начале XVII в., французским математиком Баше де Мезириаком (1581—1638). Биографы Баше характеризуют его как одного из образованнейших людей Европы того времени. Он поражал окружающих ранним развитием творческих наклонностей. Поэт, писавший на языках латинском, немецком и французском, он же глубокий алгебраист, неутомимый переводчик и восстановитель текстов, остроумный комментатор².

Сборник Баше «Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres» («Занимательные и приятные числовые задачи»), изданный в Лионе в 1612 г., исследователи литературных источников³ признают первым удачным печатным произведением в жанре математической смекалки.

Книга Баше де Мезириака получила большую известность, была переведена на все европейские языки и на долгое время служила прототипом для аналогичных сборников других авторов.

В. Аренс⁴ полагает, что первое издание книги Баше де Мезириака полностью утеряно, но Д. Смит утверждает⁵, что копия первого издания книги Баше имеется в Гарвардской библиотеке.

В 1624 г. книга Баше вышла вторым изданием. Не утратила она своего значения и через 260 лет: в 1874 г. вышло третье французское издание книги с дополни-

¹ David Eugene Smith, „History of mathematics“, V. 2, 1925, стр. 535.

² Kerviler, C.-G. Bachet seigneur de Méziriac, Paris, 1880.

³ E. Lucas, W. Ahrens, H. Schubert, B. B. Бобынин, D. E. Smith.

⁴ W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, 1918.

⁵ D. E. Smith, History of mathematics, V. 2, 1925, стр. 535.

тельными исследованиями и комментариями, выполненными проф. Лабонем, четвертое издание — в 1879 г., пятое — в 1884 г.

Такое длительное существование и широкое распространение книги Баше объясняется не только ее достоинствами, но и тем, что она отвечала назревшей и уже более не угасающей общественной потребности иметь систему общедоступных и непринужденных умственных упражнений, развивающих математическое мышление.

В русском переводе книга Баше де Мезириака впервые была издана в 1877 г. (Баше Клод-Гаспар, Игры и задачи, основанные на математике. Перевод с третьего издания). Книга содержит 50 задач с решениями.

Задачи не озаглавлены и не систематизированы по главам, но охватывают следующую группу сюжетов:

арифметические фокусы с числами, игральными костями и картами;

магические квадраты (изложены некоторые из древних способов составления магических квадратов и предложен новый способ, называемый в последующей литературе о магических квадратах «способом Баше»);

круговая детская «считалочка» (впоследствии этот сюжет стали связывать с легендой о находчивости древнеиудейского писателя Иосифа Флавия);

состязание в счете (кто первым достигнет назначенной суммы);

подбор гирь для получения на весах любого целого веса от 1 до n (эту и предыдущую задачу впоследствии стали называть «задачами Баше»);

отыскание числа по остаткам от деления;

переправы брачных пар через реку;

дележи (делаж вина при помощи переливаний, дележ наследства, плата за обед, дележ с передачей каждому такого числа предметов, какое у него есть);

размещение предметов вдоль сторон фигуры.

Для решения задач Баше де Мезириак применяет остроумные рассуждения, придумывает новые приемы.

В предисловии к книге он замечает: «... я не думаю, чтобы проникшие в эту книгу подальше тех, которые прочли одно только заглавие ее, приписали ей так мало значения: ибо допустив даже, что в ней заключаются только игры, главная цель которых доставлять по-

рядочное развлечение и занимать общество своей замысловатостью, нельзя не признать в то же время, что для исполнения этих игр в совершенстве нужна значительная доза сообразительности и нужно обладать более чем посредственным знанием арифметики, чтобы хорошо понять доказательство и уметь пользоваться многими прекрасными открытиями, которые я присовокупил».

К «прекрасным открытиям» Баше принадлежит, во-первых, утверждение, что всегда может быть найдено наименьшее из целых чисел, кратных числу α и превосходящих целое число, кратное числу β , на одно и то же число γ , где α , β и γ — любые данные числа, причем α и β — взаимно-простые, приведенное им без доказательства в первом издании книги и доказанное во втором издании; во-вторых, переоткрытие употребляемого и теперь древнеиндийского метода решения неопределенного уравнения первой степени.

Для доказательства своего теоретико-числового утверждения Баше рассмотрел 10 предварительных лемм, из которых наиболее значительной является следующая: если $a, b, c, \dots$ между собой взаимно-простые числа, p — их произведение и $n_1 < p, n_2 < p$, то остатки $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$, и соответственно $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots$, получаемые от деления каждого из двух чисел n_1 и n_2 по порядку на $a, b, c, \dots$ составят такие две системы чисел, из которых первая никогда не может совпасть со второй. «Это предложение, как не трудно видеть, — отмечает наш известный математик-историк В. В. Бобынин, — лежит в основе всякого научного изложения теории чисел»¹.

В целом книгу Баше В. В. Бобынин характеризует следующими словами: «Несмотря на свою легкую форму и общедоступность, «Задачи» Баше де Мезириака представляют очень серьезный математический труд, содержащий в себе много новых доказательств, изящных решений и математических открытий в настоящем смысле слова. В нем автор решительнее, чем кто-нибудь до него, проник в решение в целых числах задач неопределенного анализа и вполне самостоятельно пришел к обнаружению постоянного допущения решений этого

¹ В. В. Бобынин, Клод-Гаспар Баше де Мезириак. Статья в журнале «Математическое образование», 1913, № 7.

рода уравнений $ax+by=c$ при a и b взаимно-первых. Является, таким образом, не подлежащим никакому сомнению открытие Баше де Мезириаком употребляемого ныне метода решения неопределенного уравнения первой степени с двумя неизвестными. До него этот метод, хотя уже и давно изобретенный индусами, никому не был известен в Западной Европе¹.

В. В. Бобынин считает большой заслугой Баше и то обстоятельство, что он своей книгой внеучебных математических задач привлек большее, чем было до сих пор, внимание современников к неопределенным уравнениям и к теории чисел.

Последующие книги. Инициатива Баше по созданию печатных сборников математических развлечений была подхвачена. Вслед за книгой Баше появился во Франции значительно более примитивный «Сборник» (1624), составленный астрономом Жаном Лёрешаном (Jean Leurechan), выдержавший все же к 1700 г. 34 издания². Из ближайших последующих аналогичных книг наиболее значительными были:

Schventer, *Deliciae physico-mathematicae*, «Nurnberg, 1626;

Nicolas Hunt, *New recreations*, London, 1651;

Oughtred W., *Mathematical recreations*, London, 1653;

Ozanam J., *Récréations mathématiques et physiques*, Paris, 1692 (может быть 1694).

Жак Озанам (1640—1717) — талантливый самоучка, учитель по профессии и, как пишет Д. Смит в «Истории математики», «он верил в образовательную роль математических развлечений». Его книга пользовалась большим успехом и выдержала 20 изданий.

ЗНАЧИТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ БЛИЖАЙШЕГО ПРОШЛОГО

Начиная с последнего двадцатилетия прошлого века, крупный вклад в развитие литературы по математическим развлечениям внесли профессора Люка (Франция), Болл (Англия), Шуберт, Аренс и Литцманн

¹ В. В. Бобынин, Клод-Гаспар Баше де Мезириак. Статья в журнале «Математическое образование», 1913, № 7.

² D. E. Smith, *History of mathematics*, V. 2, 1925, стр. 535.

(Германия), учителя В. И. Обреимов и Е. И. Игнатьев (Россия), академик Я. В. Успенский (СССР), профессор Крайчик (Бельгия), Я. И. Перельман (СССР).

Работы Люка. Профессор Люка до конца своей жизни совмещал педагогическую работу с кропотливым собиранием и исследованием задач и проблем типа математической смекалки.

Люка еще более внимательно, чем Баше, проследил истоки и последующее развитие отдельных проблем, ставших классическими. Он расширил объем коллекции математических задач-смекалок, исправил, упростил и обобщил некоторые из ранее предлагавшихся решений («Перебравы в лодке», «Солитер», «Такен» и др.).

Его перу принадлежит ряд работ в этой области.

На русский язык была переведена и издана в 1883 г. только первая часть его четырехтомной работы: «*Rècrations mathématiques*», V. 1, 2, 3, 4, Paris, 1882—1894 («Математические развлечения»).

В эту книгу вошли в улучшенном изложении почти все темы, разработанные еще Баше, и несколько новых тем, из которых отметим следующие: мосты и острова (о топологических изысканиях Эйлера и вычерчивании фигур одним росчерком); лабиринты; размещение ферзей на шахматной доске, солитер, меледа и такен (игра в 15).

Описывая теорию такена, Люка замечает, что такен не только весьма интересная игрушка, но даже прибор, при помощи которого легко дать наглядное понятие об одном из важнейших отделов алгебры, а именно: о теории детерминантов. Здесь же Люка впервые вводит в популярную математическую литературу теорему Безу об обменах, перестановках и классах перемещений.

Книгу Э. Люка перевел на русский язык учитель математики В. И. Обреимов.

Работа Роуз Болла. Из английских математиков в жанре произведений по математическим развлечениям наиболее известен Болл. Его книга «*Mathematical Recreations and Problemes*», изданная в Лондоне в 1892 г., в 1919 г. вышла уже десятым изданием, продолжает издаваться и теперь. Книга Болла известна и во Франции по переводу с третьего английского издания. Наряду с классическими задачами на смекалку в книге представлены также простейшие задачи на сообра-

зительность и типично английские задачи на денежные банковские операции.

На русский язык книга Болла не переводилась.

Работы В. Аренса. Большую творческую и настоящую исследовательскую работу по математическим развлечениям проделал доктор Аренс (Германия). Аренс, насколько было возможно, глубоко проследил эволюцию классических задач этого типа и подробно их исследовал в своей капитальной двухтомной работе: «Mathematische Unterhaltungen und Spiele», Leipzig, 1901.

Второе значительно дополненное издание вышло в 1910 г. (I том) и в 1918 г. (II том). В этом сочинении весьма обстоятельно рассмотрена почти вся сложившаяся к нашему веку классическая группа математических развлечений и игр: затруднительные переправы, перемещение шашек (задача Тэта, см. стр. 13), упражнения, основанные на использовании недесятичных систем счисления, переливания и дележи, паркетаж, солитер, такен и домино, магические квадраты, включая квадраты Эйлера, размещения по кругу и «считалочка» (задача Флавия), проблема вечного календаря, перегибание куска бумаги (по Poy), элементарно-топологические проблемы (мосты и лабиринты, додекаэдр Гамильтона, раскрашивание географических карт и упражнения на шахматной доске («волк и овцы», «ход коня», расстановка восьми «королев»¹). Задачу о расстановке восьми «королев» на шахматной доске так, чтобы ни одна из них не находилась под ударом другой, предложил шахматист Беццель (Bezzel). Опубликована она была впервые в 1848 г. в немецком шахматном журнале. Два года спустя эта задача вторично появилась в периодической печати, на этот раз — в более популярном немецком журнале «Illustrierte Zeitung» (1 июня 1850, № 361).

Естественно возник вопрос, оказавшийся весьма не легким, о числе возможных решений задачи. Вскоре после постановки задачи доктор Найд в этом же журнале предложил в качестве решения этой задачи число 60; затем Гаусс получил число 72 (решение приведено в письме Гаусса к своему другу астроному Шумахеру от

¹ Так в те времена называлась шахматная фигура «ферзь».

12 сентября 1850 г.)¹, и, наконец, доктор Нәук получает число 92 (опубликовано в журнале «*Illustrierte Zeitung*» от 21 сентября 1850 г.).

Сопоставление приведенных дат показывает, что вопреки мнению², существовавшему до исследований Аренса, приоритет в установлении максимального числа возможных решений задачи о восьми «королевах» принадлежит не Гауссу, а некоему доктору Нәуку (от рождения слепому, как сообщает Аренс).

Пусть требуемая расстановка «королев» на шахматной доске осуществлена. Поворачивая доску на 90, 180 и 270°, мы получаем три новые конфигурации расположения «королев», также являющихся решениями задачи. При помощи зеркального отображения каждого из этих четырех расположений можно получить еще четыре новые решения задачи. Таким образом, при помощи указанных преобразований из одного решения можно получить еще восемь решений. Следовательно, задача редуцируется к некоторому первоначальному количеству основных решений, не сводимых одно к другому при помощи поворотов и зеркальных отображений.

Гаусс в своем письме к Шумахеру от 12 сентября 1850 г. указывал на девять основных решений (отсюда общее число решений $9 \times 8 = 72$), но без ручательства, что невозможно большее число решений. Спустя девять дней, 21 сентября 1850 г., в очередном номере журнала «*Illustrierte Zeitung*» был опубликован полный перечень решений задачи, найденный, как указывалось, доктором Нәуком. Выяснилось при этом, что задача имеет не девять, а 12 основных решений. Отсюда $12 \times 8 = 96$, но из них четыре решения оказываются совпадающими с другими. По-видимому, внимание Гаусса в отношении задачи о восьми «королевах» в большей мере было занято методом решения этой шахматно-комбинаторной задачи и подыскиванием подходящей арифметической аналогии для нее. В самом деле, уже в своем следую-

¹ Briefwechsel zwischen C.-F. Gauss, und H. C. Schumacher, Carl Friedrich Gauss Werke, Band XII, 1929, стр. 20.

² См. например, H. Schubert, *Zwölf Geduldspiele*, 1899. Не соответствующее истине утверждение Шуберта: «Гаусс нашел 92 решения» по инерции повторяется вплоть до наших дней (см. например, заметку «Решение задачи о восьми ферзях» в «Комсомольской правде» от 8 мая 1927 г.).

шем письме к Шумахеру (27 сентября 1850 г.¹) Гаусс предлагает следующую занимательную арифметическую задачу: к числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, расположенным в возрастающем и убывающем порядке, приписать слагаемыми некоторую последовательность этих же чисел так, чтобы все суммы в каждой группе чисел получились различными, например:

$$\begin{array}{r}
 + 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\
 \hline
 3, 5, 2, 8, 1, 7, 4, 6 \\
 \hline
 4, 7, 5, 12, 6, 13, 11, 14
 \end{array}
 \quad \text{и} \quad
 \begin{array}{r}
 + 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \\
 \hline
 3, 5, 2, 8, 1, 7, 4, 6 \\
 \hline
 11, 12, 8, 13, 5, 10, 6, 7
 \end{array}$$

Очевидно, что эту задачу Гаусс придумал как арифметическую аналогию к задаче о восьми «королевах». Действительно, каждая группа вторых слагаемых, удовлетворяющая условию арифметической задачи, дает также решение задачи о «королевах», и наоборот.

Для иллюстрации сказанного сопоставим группу чисел: 3, 5, 2, 8, 1, 7, 4, 6, дающих одно из решений арифметической задачи (см. пример выше) с одним из решений задачи о восьми «королевах» (черт. 1).

Крестики показывают положение «королев» на шахматной доске. Номера строк, в которых расположены «королевы», образуют ту же самую последовательность чисел: 3, 5, 2, 8, 1, 7, 4, 6. Аналогичную связь между решениями этих двух задач можно было бы показать и для любого другого из 92 случаев.

Получается интересный и своеобразный изоморфизм между множествами решений арифметической задачи Гаусса и задачи о восьми «королевах». Гаусс не пожелал, а может быть не счел необходимым раскрыть причину найденной им связи между решениями

8				+				
7						+		
6								+
5		+						
4							+	
3	+							
2			+					
1					+			

Черт. 1

¹ Carl Friedrich Gauss Werke, Band XII, 1929, стр. 25.

этих задач или хотя бы интерпретировать общедоступно эту связь. Нет этого и в исследованиях Аренса. Несомненно, однако, что привлечение внимания воспитуемого, упражняющегося в решении задач, к разнообразным связям между разнородными задачами очень полезно для его математического развития, а отыскание причин этих связей может служить темой для самостоятельных размышлений.

Со своей стороны в качестве одного из возможных истолкований указанного изоморфизма между решениями арифметической задачи Гаусса и решениями задачи о расстановке «королев» на шахматной доске я предложил бы, например, следующее.

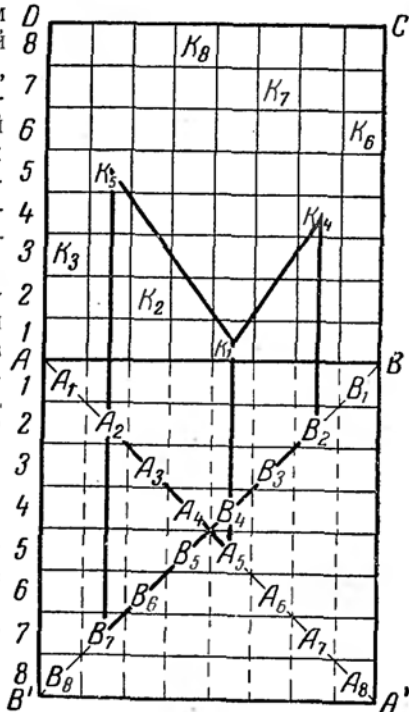
Напомним предварительно, что шахматная «королева», занимая некоторую клетку доски, держит под ударом все клетки, расположенные в той же строке и в том же столбце, а также вдоль двух диагональных линий, проходящих через занятую клетку. Следовательно, условию задачи может удовлетворять только такое расположение восьми «королев» на шахматной доске, когда каждый столбец и строка клеток доски заняты только одной фигурой и при этом прямая, соединяющая центры клеток, занимаемых любыми двумя фигурами, не должна быть параллелью для той или другой диагонали доски.

Обратимся к интерпретации на шахматной доске арифметической задачи Гаусса. Пусть числа 1—8 и 8—1 заданных последовательностей (см. стр. 29) обозначают соответственно номера столбцов клеток шахматной доски $ABCD$ (черт. 2). Поставим в соответствие каждому из чисел 1—8 точку A_i на диагонали вспомогательной доски $ABA'B'$ (i —номер столбца и число клеток в этом столбце от начальной линии AB до точки A_i , считая и ту клетку, в которой находится эта точка) и каждому из чисел 8—1 второй последовательности—точку B_{9-i} на диагонали BB' (i —номер столбца, а $9-i$ —число клеток в этом столбце от начальной линии AB до точки B_{9-i} , считая и ту клетку, в которой находится эта точка). Каждое из чисел решения (вторые строки сумм на стр. 29), как упоминалось, показывает номер строки, в которой должна быть помещена фигура в соответствующем столбце, или, иначе, число клеток в соответствующем столбце от начальной линии

AB до клетки, занятой фигурой, считая и эту клетку. На чертеже 2 такому числу i соответствует точка K_j .

Суммы чисел A_i и K_j таким образом, изображаются отрезками A_i и K_j , а суммы чисел $B_{9-i}K_j$ изображаются отрезками $B_{9-i}K_j$. Теперь становится наглядным требование Гаусса о несовпадении никакой пары сумм первой группы и никакой пары сумм второй группы, так как в противном случае отрезок, соединяющий центры соответствующих клеток, занятых «королевами», был бы параллелен какой-либо из диагоналей доски.

Если бы, например, были равны суммы чисел второго и пятого столбцов (см. стр. 29), то мы имели бы $A_2K_5 = A_5K_1$, а так как, кроме того, $A_2K_5 \parallel A_5K_1$, то четырехугольник $A_2K_5K_1A_5$ был бы параллелограммом и $K_5K_1 \parallel A_2A_5$. Если бы были равны суммы чисел тех же столбцов второй группы решения, то аналогично четырехугольник $B_7K_5K_1B_4$ был бы параллелограммом и $K_5K_1 \parallel B_7B_4$. Такое расположение «королев» не годилось бы в качестве решения задачи.



Черт. 2.

Так как «Mathematische Unterhaltungen und Spiele» предназначена не для массового читателя, то Аренс опубликовал в 1907 г. еще и упрощенный вариант этой книги, озаглавив ее так: «Mathematische Spiele», которая и была в 1911 г. переведена на русский язык под заглавием «Математические игры». В предисловии к этой книге, написанном Я. И. Перельманом, отмечается, что «в качестве приятного и поучительного чтения,

изсцряющего гибкость ума, приучающего к сосредоточенной работе мысли ради систематических поисков решения и, следовательно, хорошо подготовляющего к более серьезным научным занятиям, настоящая книга германского математика принесет несомненную пользу нашей любознательной молодежи».

Работы **Г. Шуберта**. Почти одновременно с «Математическими играми» В. Аренса появилась в русском переводе аналогичная книга проф. Г. Шуберта «Математические развлечения и игры». Это — тоже упрощенный вариант его большой трехтомной работы: «*Mathematische Mussestunden*» (1898). Тематика книги та же, что и книги В. Аренса. Заслуживают внимания преподавателей теоретические разъяснения и дополнительные доказательства, выполненные профессором С. О. Шатуновским — редактором русского перевода книги Г. Шуберта.

Работы **В. Литцманна**. Вальтер Литцманн (W. Lietzmann) — известный немецкий математик и методист. В 1955 г. ему исполнилось 75 лет. В. Литцманн является автором учебников и задачников, нескольких методических пособий, в том числе ценной и интересной «Методики преподавания математики в школе», научно-популярных книг и статей.

На русский язык переведены почти все его книги, относящиеся к занимательной математике (см. библиографический перечень), среди которых наиболее популярная в Германии (и других странах) книга «*Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen*», Göttingen (первое издание было осуществлено в 1921 г., восьмое — в 1956 г.). На русский язык эта книга была переведена и издана в 1923 г. под заглавием: «Веселое и занимательное в фигурах и числах (математические развлечения)».

Первые параграфы книги заполнены остротами и шутками математического содержания, выдержками из романов, новелл, очерков, легенд и автобиографий, стихотворениями на математические темы. Приведен, например, отрывок из романа Эмиля Штрауса «Смерть», в котором описана трагедия учителя математики, не имеющего никакого понятия о математике, путающего параллелограмм с параллелепипедом. Этот учитель

считает, что изучение математики состоит в выучивании наизусть таблицы логарифмов¹.

В небольшом отрывке из воспоминаний композитора Грига рассказывается о том, как в детстве Григ, получив задачу на умножение, для ускорения дела выбросил нули и... потерпел фиаско. «После этого,— иронизирует Григ над собой,— я научился тащить все нули за собой. От них не избавишься».

Много несложных шуточных вопросов, например:

а) Одно яйцо варится 4 минуты. Как долго будут вариться 6 яиц?

б) В семье 5 сыновей. Каждый сын имеет одну сестру. Сколько всего детей в семье?

в) Мария вдвое старше Анны. Через 4 года она будет в 6 раз старше Анны. Сколько лет каждой из них?

Литцманн остро показывает несуразность содержания некоторых школьных задач: «Решает, например, мой сын задачу, заданную учителем: если 10 каменщиков при 10-часовом рабочем дне за 150 дней выстроили дом, то сколько каменщиков могут выстроить этот дом при 1-часовом рабочем дне за 30 дней?

Сын рассчитал: $\frac{10 \cdot 150 \cdot 10}{30 \cdot 1} = 500$ (каменщиков).

Я написал учителю, что решение задачи может быть и правильное, но условие ее бессмысленно. Аналогично можно было бы спросить: если 1 учитель 7 лет учит ученика, то сколько учителей могут это сделать в 1 день? Что-то около 2100 учителей... так-то, господин учитель!»

В книге значительное внимание уделено счету. Рассматриваются игры и задачи «на счет», приемы быстрого счета, ошибки и причуды счета, бинарная система счисления и, конечно, магические квадраты.

Раздел «О геометрических формах» составлен из традиционных задач-смекалок геометрического характера.

В предисловии доктор Литцманн обращает внимание учителей на то, что некоторые задачи из числа предложенных в книге могут и должны быть использованы

¹ Этот пример и все последующие взяты из восьмого немецкого издания книги В. Литцманна; в русском переводе с первого немецкого издания имеются не все из приведенных здесь примеров.

учителем также и непосредственно на уроке для того, чтобы заинтересовать учеников изучаемым материалом, поразить их воображение в кульминационный момент урока или произвести разрядку умственного напряжения, возникшего в процессе ведения урока.

Свою книгу Литцманн называет пирогом с прозрачными изюминками, который он хотел бы сделать удобоваримым, а всыпав в него миндаль в скорлупе, — побудить читателя кушать этот пирог медленно.

Работы М. Крайчика. Большим энтузиастом математических развлечений был профессор Брюссельского университета М. Крайчик¹ (Maugice Kraitchik) — автор известного на западе учебника по теории чисел и большого, подробного сборника классических и новых задач-смекалок: «La mathématique des jeux, on Recreations mathematiques», изданного в Брюсселе в 1930 г.

В 1941 г. Крайчик был приглашен в Нью-Йоркскую новую школу общественных наук для чтения систематического курса лекций по математическим развлечениям. На основе этих лекций он написал и издал новый вариант сборника задач-смекалок: «Mathematical Recreations» (1943), теперь уже на английском языке. Это превосходная книга, написанная со вкусом и любовью. Нет сомнения, что в западноевропейской литературе среди книг, предназначенных для широкого круга читателей со средним математическим образованием, книга Крайчика и по сей день признается лучшей (одно из очередных изданий этой книги датировано 1953 г.).

В книге 12 глав. Решение задачи приводится вслед за ее условием.

Глава первая «Математика без вычислений». Здесь около десятка задач, среди которых логические, шахматные и одна геометрическая. Открывает главу задача-шутка.

Задача. Пришли ко мне два друга. Оба — отличные шахматисты. После обеда я с каждым из них сыграл по одной партии и обе проиграл несмотря на то, что имел пешку в качестве «форы». Вошедшая в комнату 12-летняя дочь приветствовала нас и сказала: «Папоч-

¹ М. Крайчик родился в России. Эмигрировал в Бельгию в 1913 г. Умер в Брюсселе в 1957 г.

ка, я стыжусь за тебя. Если позволишь, я сыграю успешнее и без всякой «форы». Я буду играть одновременно на двух досках, с одним партнером — белыми, с другим — черными». (Кстати, дочь была едва лишь знакома с правилами движения фигур). К моему восторгу, смешанному с досадой, она действительно сыграла с лучшим результатом, нежели я.

Как она действовала?

Завершается глава геометрической задачей, поданной в такой же иронически забавной форме.

Задача. Почтенное семейство пауков, состоящее из обширной мамы и восьми тощих подростков, гнездились на одной из стен комнаты, четыре стены которой, пол и потолок — прямоугольники. Из-за второй мировой войны пищи было недостаточно и голодные паучки непрерывно ворчали. Но вот на противоположную стену тихо села огромная муха. Если бы Евклид мог быть вызван из могилы, он показал бы, что охотники и жертва находились в одной вертикальной плоскости, пересекающей две противоположные стены и что пауки находятся на 8 дюймов выше центра, а муха — на 8 дюймов ниже центра стены. Внезапно один из юных паучков вскричал весело:

«Мама, смотри! Там — муха! Давайте схватим ее и съедем!»

«Имеется 4 маршрута к мухе. Какой мы выберем?» — пылко воскликнул другой паучок.

«Вы забыли Евклида, мои дорогие. Имеется 8 маршрутов к мухе. Идите все различными дорогами, не пользуясь другими средствами передвижения, нежели как на собственных ногах. Кто достигнет цели первым, будет награжден наибольшей порцией добычи».

По сигналу, данному мамашей, 8 паучков пустились в путь по различным направлениям со скоростью 0,65 миль в час. Через $\frac{625}{11}$ секунд они одновременно сошлись у цели, но... атаковать было некого, так как муха имела глаза со всех сторон. Каковы размеры комнаты?

Глава вторая «Старинные и курьезные задачи».

Глава третья «Числовые развлечения и игры». Здесь автор в своей стихии. Он доходчиво рассказывает о простых и совершенных числах, о фигурных числах,

о числах Мерсенна и Ферма. Любопытно отметить, однако, что, не выходя за рамки элементарных математических операций, Крайчик предполагает все же у читателей своей книги наличие хороших представлений о сравнениях. Так, например, упоминая о том, что Эйлер доказал делимость числа $F_5 = 2^{32} + 1$ на 641, Крайчик коротко излагает элегантное доказательство этого положения.

Легко проверить, что $641 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4 = 5 \cdot 2^7 + 1$. Тогда, по модулю 641, имеем: $5 \cdot 2^7 \equiv -1$, $5 \cdot 2^8 \equiv -2$, $5^4 \cdot 2^{32} \equiv 2^4$, $-16 \cdot 2^{32} \equiv 16$, $2^{32} \equiv -1$ и, наконец, $2^{32} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$.

В одной из задач предлагается найти такое целое число x , чтобы оно вместе с x^2 содержало все цифры от 1 до 9, каждую по одному разу. Решение: так как сумма девяти цифр равна 45, то $x + x^2 \equiv 0 \pmod{9}$. Имеются два решения этого сравнения, которые удовлетворяют остальным требованиям задачи: $567^2 = 321\,489$ и $854^2 = 729\,316$.

Числовым головоломкам Крайчик не предоставил места в своей книге.

Глава четвертая «Арифметико-геометрические вопросы». Рассматриваются два вопроса: первый вопрос — о существовании прямоугольных треугольников, стороны которых взаимно-простые числа. При этом оказывается, например: а) число, выражающее длину одной стороны прямоугольного треугольника, всегда кратно трем, а длину второй стороны — кратно пяти; б) число, выражающее площадь такого треугольника, кратно шести, а число, выражающее произведение сторон, кратно шестидесяти; второй вопрос — о существовании арифметических или героновых треугольников, т. е. таких, стороны и площадь которых — рациональные числа.

Глава пятая «Календарь». Кратко изложена история календаря, приведены примеры механических и вечных календарей.

Глава шестая «Вероятность». Подобраны обычные вводные задачи на вероятность и дан анализ некоторых азартных игр.

Глава седьмая «Магические квадраты». Автор лишь слегка касается вопросов теории магических квадратов, но знакомит читателей с приемом составления

магических квадратов при помощи «решетки точек» и так называемых «ломаных путей».

Главы восьмая и девятая «Геометрические развлечения» и «Перестановки». Приведены традиционные геометрические задачи-смекалки и задачи на преодоление затруднительных положений.

Главы десятая и одиннадцатая. Даны классические задачи о размещении ферзей, или ладей, или коней на шахматной доске. Приводятся два варианта этой задачи: первый вариант — расставить на шахматной доске одинаковые фигуры так, чтобы ни одна фигура не могла находиться под ударом другой фигуры; второй вариант — расставить на шахматной доске минимальное число одинаковых фигур так, чтобы каждое поле доски было под ударом. Выясняется, например, что во втором варианте задачи минимальное число ферзей равно пяти для досок 8×8 , 9×9 , 10×10 , 11×11 . В аналогичных случаях минимальное число коней — 12.

Для шахматного коня еще ставится и такая задача: обойти доску непрерывным движением, побывав на каждом поле по одному разу. Известно, что число решений этой задачи очень велико. Только на одной половине обыкновенной доски 8×8 конь может сделать 122 802 512 различных маршрутов, каждый из которых может быть продолжен на второй половине доски.

Глава двенадцатая «Игры». Рассмотрены преимущественно позиционные игры на шахматной доске. Привлекает внимание интересный прием алгебраизации возможных «ходов» шахматных фигур и шашек. Так, например, шашка, как известно, перемещается по диагонали вправо или влево от своего первоначального положения. Пусть символы I^k и I^{-k} обозначают соответственно, что шашка находится на k столбцов правее или левее своей первоначальной позиции; $I^0 = 1$ будет указывать на то, что шашка осталась в том же столбце. Логическое отношение «или» будем представлять сложением, а отношение «и» — умножением. Тогда $I^{-1} + I$ имеет смысл альтернативы, стоящей перед шашкой при каждом ее движении: «1 столбец налево или 1 столбец направо». Если шашка делает два движения, то она делает одно движение i и делает другое движение, что и показывает, например, такая запись: $(I^{-1} + I) \cdot (I^{-1} + I)$, или $(I^{-1} + I)^2$. Это значит:

«шашка двигается на 1 столбец влево *или* вправо и она двигается опять на 1 столбец влево *или* вправо.

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получаем: $I^{-2} + I^2 + 2$, что указывает на все возможные результаты двух движений: «*или* она окажется на 2 столбца левее, *или* на 2 столбца правее своей первоначальной позиции, *или* останется в том же столбце.

ОТЕЧЕСТВЕННЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

В России отдельные занимательные задачи начали появляться еще в рукописных математических пособиях XVII в., а впоследствии, начиная с «Арифметики» Л. Магницкого (1703), включались и в печатные издания учебных руководств для школы.

Первые сборники задач математической смекалки на русском языке относятся к концу XVIII, началу XIX вв. Вначале это были небольшие и весьма примитивные книжки или дополнительные главы к книгам по арифметике. В качестве примера укажем на следующие две книги.

«Гадательная арифметика для забавы и удовольствия», Спб., 1789. Автор и издатель — И. Краснопольский. В книге 62 страницы и содержит она 41 задачу (арифметические фокусы угадывания чисел, переправы, задача Иосифа Флавия, определения дня недели и др.).

«Карманный математик, или самый легкий и удобный способ самому собой в кратчайшее время основательно обучиться всем правилам арифметики с присокуплением разных полезных и любопытных математических задач, сочиненный с вопросами и ответами в пользу российского юношества» (автор не указан), Спб., 1809, 216 стр.

Работа **Ив. Буттера**. Книжка Ив. Буттера «Занимательные и увеселительные задачи и загадки»¹ (1831) небольшого формата, 55 страниц, содержит 110 задач и головоломок. Приведены ответы без решений. Задачи разнообразны, но не все сформулированы достаточно корректно.

¹ «Алфавитный каталог русских книг по математике, вышедших в России с начала книгопечатания до последнего времени», составленный Д. В. Агаповым в 1908 г., книгу Ив. Буттера не упоминает.

Приведем несколько задач из этой книги.

Задача 1. Написать сто без нолей. Решение: С (латинское «це» в римской нумерации значит 100); также $99\frac{9}{9}$. (Возможность других ответов не предусмотрена.)

Задача 3. Половина двенадцати сколько? Решение: VII (семь). (На последней странице книжки в примечании к задачам сказано: VII есть верхняя часть в римском счету числа XII.)

Задача 5. Когда от 150 отнимается 15, сколько останется? Решение: ничего (0). (Формулировка задачи не соответствует смыслу ее решения.)

Задача 12. Написать число, состоящее из 7 цифр; когда обратится, было бы то же число. Решение: 1860981 или 6180819. (Ясность постановки этой задачи оставляет желать лучшего. Ответ носит характер случайной догадки.)

Задача 13. 3 яблока разделить двум отцам и двум сыновьям так, чтобы каждому досталось по целому яблоку. Решение: Поликарп, Сидор и Карп. Отцы: Поликарп — отец Сидора, Сидор — отец Карпа, Сыновья: Карп — сын Сидора, Сидор — сын Поликарпа.

Задача 69. В одном училище было 30 учеников, в котором числе было 15 прилежных и 15 ленивых; один благодетель подарил 15 червонцев для раздачи оных прилежным ученикам; учитель расположил своих учеников так, что 9-й был всегда прилежный и всегда 9-му давал по одному червонцу и так ленивым не досталось ни одного червонца. (Ответ дан в форме схематического рисунка.)

Есть в книге Буттера задачи на определение числа предметов по остаткам от деления, задачи «на переправу», на разливание жидкости «пополам» при помощи двух пустых сосудов, числовые фокусы и задачи на расположение предметов вдоль сторон прямоугольника; есть несколько арифметических задач школьного типа, представлены и элементы магических квадратов.

Работа В. Г. Бенедиктова. В 1869 году поэтом В. Г. Бенедиктовым был подготовлен сборник арифметических задач.

Этот сборник богаче, чем книга Буттера. По структуре и отчасти по содержанию работа В. Г. Бенедиктова, не имеющая заглавия, близка к книге Баше де Ме-

зириака, которая, очевидно, в подлиннике была знакома нашему поэту. В. Г. Бенедиктов предпосылает своему сочинению небольшое вступление, в котором справедливо замечает: «Прикладная практическая часть арифметики требует иногда не только знания теоретических правил, излагаемых в чистой арифметике, но и находчивости, приобретаемой через умственное развитие, при знакомстве с различными сторонами не только дел, но и безделиц, которым поэтому дать здесь место мы сочли не излишним».

Работа В. Г. Бенедиктова делится на 20 небольших нумерованных глав, имеющих каждая особое заглавие: «Так называемые магические квадраты»; «Угадывание задуманного числа от 1 до 30»; «Угадывание втайне распределенных сумм»; «Задуманная втайне цифра сама по себе обнаруживающаяся»; «Узнавание вычеркнутой цифры». Имеются и такие главы, как «Чародействующий полководец и арифметическая армия»; «Недостаток в пшеничных зернах для 64 клеток шахматной доски» и последняя, 20-я глава «Громадное число живших на земном шаре обитателей». Уделено место и карточным фокусам арифметического характера.

Неизвестно, по каким причинам работа В. Г. Бенедиктова не была напечатана. Сама рукопись этого «Сборника», как утверждает Я. И. Перельман в книге «Живая математика», была обнаружена лишь в 1924 г.

Перельман же установил, по некоторым косвенным данным, и год (1869), когда она была написана (на рукописи год не обозначен).

Но Я. И. Перельман ошибался, утверждая, что в эпоху составления сборника Бенедиктова (1869) на русском языке не издано было еще ни одного сочинения подобного содержания не только оригинального, но даже и переводного. Как было сказано выше, например, в 1844 г. уже вторым изданием печатался небольшой сборник Ив. Буттера.

Работы В. И. Обреимова. В. И. Обреимов — видный представитель прогрессивной отечественной методической мысли, активный борец за народное просвещение и за передовые методы преподавания математики. Именно ему принадлежат первые серьезные шаги в разработке проблем внеклассной работы по математике.

В 1884 г. была опубликована оригинальная книга В. И. Обреимова «Математические софизмы», дающая педагогически продуманную систему упражнений на опровержение ложных доказательств.

В каждое из двух последующих изданий (1889 и 1898) В. И. Обреимов вносил новые интересные дополнения.

Не менее интересна и вторая книга В. И. Обреимова — «Тройная головоломка», вышедшая в свет в том же, 1884 г.

В первом разделе этой книги рассматривается китайская головоломка на составление разнообразных симметричных фигур из семи частей квадрата.

Второй раздел посвящен упражнениям на составление одно- и двухцветных паркетов. Упражнения в высвобождении колец из замкнутых проволочных цепочек составляют третий раздел книги.

Педагогическое назначение этой книги — содействовать развитию у учащихся конструкторских навыков и восприятию чувства симметрии и красоты геометрических форм¹.

Работы Е. И. Игнатьева. За несколько лет до появления первых переводов на русский язык упоминавшихся книг В. Аренса и Г. Шуберта были у нас опубликованы два сборника математических задач на смекалку, составленные Е. И. Игнатьевым.

Первый небольшой сборник «Математические игры и развлечения» был издан в 1904 г.; второй, трехтомный, «В царстве смекалки» был издан в 1907 г. (кн. 1), в 1909 г. (кн. 2), в 1911 г. (кн. 3). Здесь в основном все те же задачи, знакомые нам по книгам Баше и Люка, но огромное достоинство книг Е. И. Игнатьева, в особенности второй его книги, в их большой доступности, нарядности в лучшем смысле этого слова. Книги Игнатьева хорошо литературно обработаны, здесь сказалась доброжелательная помощь автору со стороны писателя В. И. Короленко².

¹ Подробнее о педагогическом значении работ Обреимова см. В. Л. Минковский, Опровержение ложных доказательств как средство для развития математического мышления учащихся (диссертация), 1947.

² В предисловии к книге «Математические игры и развлечения», 1904, Е. И. Игнатьев упоминает о литературной помощи ему со стороны В. И. Короленко.

В докладе о детской литературе на I Всесоюзном съезде писателей С. Маршак, имея в виду Е. И. Игнатьева, сказал, что он помнит «...талантливого и самообытного математика, который ночи напролет пил крепкий чай, задыхаясь в табачном дыму, и писал для детей книги, которые назывались «В царстве смекалки»¹.

Подбор задач в сборниках Е. И. Игнатьева вполне удовлетворяет условиям, выдвинутым самим автором: они — просты, типичны, вызывают внимательного читателя на составление и придумывание других подобных задач, а в основе задач лежат те или иные важные и интересные теории из разных областей чистых математических знаний.

«Взяты, например, такие интересные задачи, как о восьми королевах, или ход шахматного коня, показаны их типические решения, сказано о числе их и... затем вопрос предоставляется любознательности и самодеятельности читателя»².

Тематика книги Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки» весьма разнообразна. В живой, популярной и даже интригующей форме предлагаются классические задачи на математическую смекалку, задачи народного творчества, а также сообщаются сведения о комбинаторике, теории вероятностей и математической статистике, о счетных машинах и аксиомах алгебры и геометрии, о четвертом измерении и геометрии Лобачевского.

Четыре издания этой книги (последнее издание вышло в 1925 г.) наилучшим образом содействовали популяризации жанра произведений, содержащих внеучебные математические задачи, проникновению в семью хороших упражнений для разумного использования часов досуга, воспитанию интереса к математике.

Надо иметь в виду, однако, что в книге Е. Игнатьева «В царстве смекалки» содержится ряд методологически неприемлемых утверждений и устаревшие математические сведения, а поэтому в настоящее время для самостоятельного чтения в семье ею можно пользоваться только при соответствующей консультации со стороны компетентного руководителя. Приведем примеры.

¹ С. Маршак, О большой литературе для маленьких, 1934, стр. 8.

² Е. И. Игнатьев, Математические игры и развлечения (предисловие), 1904.

Отрицательные числа Игнатъев называет обратными положительным. Определяя функцию, Игнатъев пишет: «...когда одна величина, x , зависит от другой, y , так, что с изменением x изменяется и y , и если эти величины и их изменения конечны, то... величина y в таком случае называется функцией от величины x » (кн. 2)¹.

Простые числа вида $M_n = 2^n - 1$ называются числами Мерсенна (современник Ферма). Игнатъев приводит только 8 первых чисел Мерсенна: для $n=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$ и 31 . Очевидно, Игнатъев не знал, что уже в его время нашим соотечественником Первушиным было выявлено и следующее число Мерсенна, соответствующее значению $n=61$ (см. архив АН СССР, ф. 1, опись 2, 1883, № 28, § 270). В настоящее время установлено, что M_n — число простое также и для $n=89, 107, 127$ и др. Теперь известно уже 17 чисел Мерсенна и наибольшее из них пока $2^{2281} - 1$.

В одну из книг Игнатъев включил идеалистическую статью проф. А. В. Васильева «Законы случайного и математическая статистика». Основой этой статьи являются взгляды немецкого реакционного статистика Б. Лексиса, создателя «теории» устойчивости статистических рядов в целях доказательства «вечности» и «незыблемости» капиталистических порядков (см. в БСЭ, изд. 2, статью «Закон больших чисел»).

Работы Я. И. Перельмана. Деятельность Е. И. Игнатъева по созданию полноценных и педагогически продуманных сборников математических задач на смекалку для семьи и школы была продолжена Я. И. Перельманом (1882—1942), который посвятил этому около 30 лет своей творческой деятельности. Его книги по разным отделам занимательной элементарной математики получили огромное распространение и являются нашим национальным богатством в жанре произведений, посвященных математическим задачам-смекалкам².

Сборники Перельмана до сих пор ценятся педагогами как незаменимые начальные внеучебные пособия по воспитанию математической инициативы у подростков и взрослых.

¹ Цитируется по последнему, переработанному автором, изданию (1925).

² См. библиографический перечень.

Работы Перельмана дополнили группу классических задач на смекалку задачами, связанными с жизненными наблюдениями и практической деятельностью людей.

Работа **Я. Успенского**. Классические внеучебные задачи не остались без внимания и со стороны отечественных ученых математиков. В 1924 г. акад. Я. В. Успенский опубликовал оригинальные и глубокие исследования по теории математических игр, охватив почти всю группу классических задач рассматриваемого типа¹.

Книга «Избранные математические развлечения» написана популярно, но все же рассчитана не на массового читателя. В небольшом «Прибавлении» в простой, доходчивой форме сообщаются сведения о «сравнениях» и «вычетах», которыми автор пользуется как математическим средством в своих исследованиях.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Нет необходимости воспроизводить в деталях всю хронологию развития жанра произведений, посвященных математическим задачам на смекалку. За последние полтора столетия мировая литература, относящаяся к этому жанру литературы, разрослась до огромных размеров.

По неполным данным к 1934 г. только о «магических квадратах» было написано на французском, немецком, английском и русском языках около тысячи книг и статей, принадлежащих перу более чем 380 авторов².

Появление статей о «магических квадратах» в английских, немецких и французских математических журналах не прекращается и поныне.

Тщательно подобранная доктором Аренсом и все же не исчерпывающе полная библиография европейских книг, имеющих отношение к математическим задачам на смекалку, доведенная до 1918 г., насчитывает 762 наименования (включая, правда, и повторные издания одной и той же книги). Продолжая эту библиографию по 1943 г., W. L. Schaaf перечислил³ еще 156 книг (из

¹ Я. Успенский, акад. Избранные математические развлечения, 1924.

² См. Cazalas E., Carrés magiques, 1934.

³ В журнале «Scripta mathematica», 1944.

них только одну на русском языке) и 158 журнальных статей (за первые 43 года двадцатого столетия).

До начала второй мировой войны существовали два основных литературных очага, объединяющих усилия многочисленной группы специалистов и любителей, всерьез и между делом занимающихся проблемами математических развлечений: один из них — в Нью-Йорке: журнал «*Scripta mathematica*», основанный в 1932 г.; другой — в Брюсселе: журнал «*Sphinx*», основанный в 1931 г. и целиком посвященный математическим развлечениям. Организатор и редактор журнала «*Sphinx*» — проф. Крайчик (см. стр. 34).

В годы второй мировой войны журнал «*Sphinx*» перестал издаваться. Издание журнала «*Scripta mathematica*» продолжается.

По инициативе М. Крайчика были организованы и проведены два международных конгресса по математическим развлечениям: в 1935 г. — в Брюсселе и в 1937 г. — в Париже. Библиотеки нашей страны, к сожалению, не имеют отчетов об этих конгрессах.

В Москве с 1957 г. возобновилось издание научно-популярных сборников «Математическое просвещение». Будем надеяться, что на страницах этих сборников появятся новые задачи-смекалки и статьи, посвященные проблемам «математических досугов».