Вольберг О. А. Еще о приближенных вычислениях// Физика, химия, математика, техника в трудовой школе. 1929. № 7. С. 63-66.

ЕЩЕ О ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ.

Предлагая вниманию читателей еще одну статью о приближенных вычислениях, о которых так много писалось в последние годы, заранее обещаю не внести своей доли путаницы в этот вопрос. Никаких новых приемов и методов приближенных вычислений я не предлагаю. Я не намерен также заниматься разбором правил и методов, рекомендуемых другими авторами. Единственным целесообразным методом приближенных вычислений для школы я считаю метод «подсчета цифр», разработанный В. Брадисом[1]) и принятый ГУС'ом в программах 1927 г. Задача этой статьи — отметить ряд теоретических ошибок, которые — увы — входят в практику обоснования правил приближенных вычислений. Никаких других целей эта статья не преследует, и ничего другого, кроме некоторого теоретического углубления вопроса, прошу от нее не ждать.

Число может быть точным или приближенным, но рассуждение может быть только *верным* или *неверным*. «Приближенных» рассуждений не существует; а между тем в статьях о приближенных вычислениях нередко применяется целый ряд «приближенных» (стало быть, *неверных*) доводов.

Иногда задачу приближенных вычислений формулируют следующим образом: всякое действие должно быть выполнено так, чтобы вычислитель мог поручиться за верность всех цифр результата. Такая формулировка вдвойне неправильна: добиться того, чтобы *все* цифры результата *каждого* действия были верны, во-первых, *невозможно*, а во-вторых, *не нужно*. Рассмотрим пример. Требуется умножить

15 на 15 и затем полученное произведение умножить на 42 (все числа приближенные, погрешность каждого не превышает 0,5). Выполнив первое действие, найдем что первое произведение лежит между 225 + 15 или 225 — 15, так что поручиться можно только за первую цифру результата. Значит, согласно поставленному требованию, мы должны записать:

$$15 \times 15 \cong 200$$

Выполнив умножение 200 × 42, найдем, что искомое произведение лежит между 8400 + 2200 и 8400 — 2200, так что в окончательном результате нельзя поручиться *ни за одну* цифру. Получился «пшик», как в известной побасенке о незадачливом кузнеце.

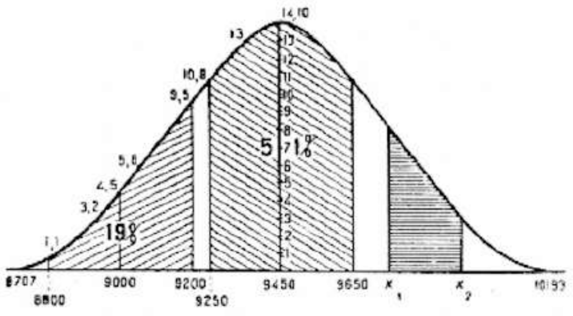
Иное дело, если бы мы стремились к тому, чтобы в *окончательном* результате иметь только верные цифры. Большей частью (однако, не всегда) этого добиться можно, но... не нужно. В самом деле, что такое «верные» цифры? Мы говорим, что все цифры числа «верны», если предельная погрешность этого числа не превышает $^1/_2$ единицы разряда последней значащей цифры его. Если же предельная погрешность превышает 5 (по некоторым авторам 10) единиц разряда последней значащей цифры числа, то последняя значащая цифра его «неверна»; в прочих случаях она «сомнительна», Допустим, например, что точное число лежит между 24,48 и 24,04. Заменяя неизвестное точное число приближенным числом 24 мы делаем ошибку не более 0,48 т.-е. менее половины разряда последней оставленной цифры. Заменяя же неизвестное точное число числом 24,26 мы делаем ошибку не более 0,22. Таким образом в приближенном числе 24 все цифры верны, а в приближенном числе 24,26 последняя цифра не верна. Значит ли это, что первое число безусловно предпочтительней второго? Вовсе нет: так как предельная погрешность второго числа приблизительно вдвое меньше, чем первого. Стало быть нет никакой *необходимости* избавиться от заведомо «неверных» цифр приближенного числа. Вообще нужно освободиться от фетишизма слов — «верные» и «неверные» цифры. Эти термины (как всякие термины) имеют только условное значение, именно то, которое выражено в их определении. Мы же, соблазненные знакомым словом, нередко бываем склонны придать термину более широкое толкование. «Неверное» не заслуживает внимания, должно быть вычеркнуто, отброшено; поэтому «неверные» цифры нужно откинуть — вот типичный (и конечно, совершенно ложный) ход мыслей, который чрезвычайно часто встречается при обосновании правил приближенных вычислений.

С терминами, которые вводят в заблуждение, нужно поступать крайне сурово: «если термин соблазняет тебя, отсеки его». Поэтому вместо «верные» и «неверные» предпочтительней говорить «надежные» и «ненадежные», или «точные» и «неточные» цифры. Слова «надежный» или «точный», конечно, тоже должны пониматься здесь чисто условно, но соблазн привнести в них содержание, не предусмотренное определением, не столь велик.

Итак, оставив в приближенном числе заведомо «неверные» (т. е. ненадежные) цифры, мы никакой ошибки не делаем.

Совершенно неправ преподаватель, который подсовывает ученикам такое рассуждение: «последние цифры полученного результата неверны, стало быть *нет никакого смысла их сохранять*». Есть смысл сохранить *все* цифры полученного результата, даже заведомо «неверные», так как выполнив над приближенными числами действия как над точными, мы получаем всегда *наиболее вероятное* значение искомого (неизвестного) точного числа.

Чтобы пояснить, что значит в данном случае «наиболее вероятное значение», вернемся к примеру, разобранному выше. Требуется умножить $15 \times 15 \times 42$. Сомножители мы считаем приближенными числами, причем полагаем, что погрешность каждого из них с одинаковой вероятностью может иметь любое значение между $+0{,}5$ и $-0{,}5$. Выполнив умножение, получаем, что искомое произведение лежит между $9450 + 743$ и $9450 - 743$; Однако это еще не все, что мы можем узнать об интересующем нас *точном* числе. Можно еще вычислить вероятности разных значений этого числа или, лучше сказать, вероятности того, что интересующее нас число лежит в том или ином интервале. Как производятся такие вычисления, мы здесь говорить не будем. Сводка их представлена на черт. 1. Вероятность того, что точное произведение, которое мы хотели бы, но не можем найти, находится между некоторыми числами x_1 и x_2, измеряется площадью части кривой нашего чертежа, заключенной между ординатами $x = x_1$ и $x = x_2$ (площадь всей кривой равна 1). Таким образом вероятность того, что искомое число лежит в очень малом интервале, вблизи, например, числа x_1, пропорциональна ординате этой кривой, соответствующей абсциссе x_1; вероятность того, что оно лежит в таком же интервале вблизи x_2, пропорциональна ординате, соответствующей абсциссе x_2. При $x = 9450$ кривая имеет максимум; значит число 9450 является *наиболее вероятным* значением искомого точного числа. Впрочем вероятность того, что искомое точное число лежит очень близко к 9450, например, между $9450 + 0{,}5$ и $9450 - 0{,}5$ весьма мала: равна всего 14.10^{-4}; но вероятность того, что оно лежит в столь же узком интервале вблизи, например, числа 9000, еще меньше: именно, равна 4, 5.10^{-4}. Поэтому можно сказать, что округление результата действий над приближенными числами сводится к замене одного ненадежного числа другим числом, *еще менее надежным*.

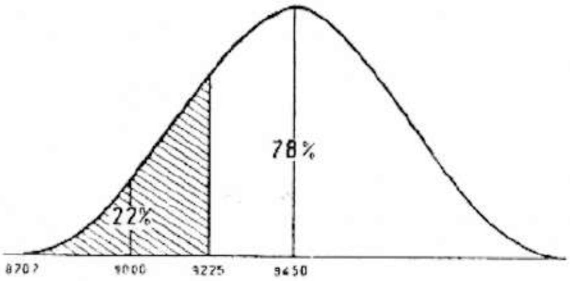


Черт. 1.

Приняв за приближенное значение искомого числа число 9450, мы можем поручиться за то, что абсолютная величина погрешности не превышает 743; мало того, с вероятностью, равной 51%, можно ожидать что абсолютная величина погрешности не превышает 200 (черт. 1). Если же мы округлим полученный результат и примем за приближенное значение искомого числа 9000, то вероятность того, что абсолютная величина погрешности не превышает 200, окажется уже гораздо меньше — около 19% (черт. 1), и вероятность бо́льших погрешностей возрастет.

Вообще округление результата действий над приближенными числами ухудшает картину распределения погрешностей в том смысле, что вероятности малых погрешностей уменьшаются за счет увеличения вероятностей бо́льших погрешностей.

Если бы из всего вышеизложенного читатель сделал вывод, что округление результата действий над приближенными числами увеличивает погрешность результата, это означало бы, что я недостаточно ясно изложил суть дела. Какова действительная погрешность результата, мы, конечно, не знаем и знать не можем. Случайно неизвестный точный результат может лежать *ближе к округленному* результату, чем к неокругленному, так что округление *уменьшило бы* погрешность. Но может быть и обратное: точный результат *ближе к неокругленному*; в этом случае округление *увеличило бы* погрешность. Какое из этих двух событий имеет место в действительности мы не знаем, но второе вероятнее первого. В нашем примере погрешность округленного результата, т.-е. числа 9000, была бы меньше погрешности неокругленного результата (9450) в том и только в том случае, если бы точное произведение случайно лежало между 9450—743 и 9450—225. Вероятность этого измеряется заштрихованной площадью кривой черт. 2.

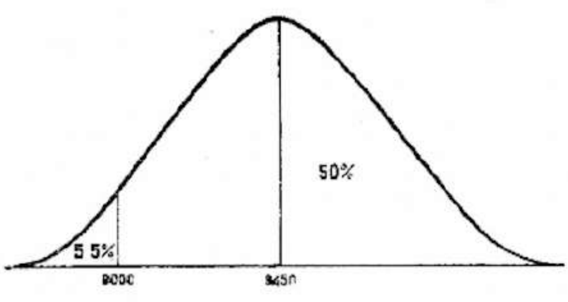


Черт. 2.

Она равна приблизительно 22%, тогда как вероятность увеличения погрешности равна 78%.

Можно пойти еще дальше и поставить такой вопрос: какова вероятность того, что погрешность вследствие округления увеличится не более чем на 100,200,300... вообще на любое число единиц. Назовем число, показывающее, насколько увеличилась погрешность вследствие округления, *«дополнительной погрешностью от округления»*. Тогда поставленный выше вопрос можно более точно и обще формулировать так: какова вероятность того, что дополнительная погрешность от округления лежит в том или ином интервале?

Разумеется, найти дополнительную погрешность от округления невозможно, так как она по сути дела может иметь любое значение от — 450 до + 450, но вероятности различных значений ее вычислить легко. Например, погрешность вследствие округления возрастет на 450 в том и только в том случае, если точный результат больше неокругленного. Вероятность этого равна 50% (см. черт. 3). Это и есть вероятность того, что дополнительная погрешность от округления равна 450. Далее легко понять, что погрешность от округления *уменьшится* на 450 в том и только в том случае, если точный результат меньше 9000. Вероятность этого равна 5,5% (см. черт. 3). Такова, стало быть, вероятность того, что дополнительная погрешность от округления равна — 450. Немного более сложным рассуждением найдем вероятность того, что дополнительная погрешность от округления лежит между 0 и 100, или между 0 и —100, и т. д., первая равна $5^{3}/_{4}$%; вторая $4^{3}/_{4}$% и пр.



Черт. 3.

Зная вероятности всех возможных значений дополнительной погрешности от округления, можно найти *среднее* значение этой погрешности или, лучше сказать, математическое ожидание ее. В нашем примере оно равно 236. Этот результат нужно понимать так: если бы мы весьма часто имели дело с умножением $15 \times 15 \times 42$, причем *точные* значения сомножителей менялись бы от раза к разу так, что, например, первый точный сомножитель (а также и второй) каждый раз мог бы иметь с одинаковой вероятностью любое значение от 15 — 0,5 до 15 + 0,5, третий — от 42 — 0,5 до 42 + 0,5, то, округляя каждый раз произведение до 9000, мы увеличивали бы погрешность *в среднем* приблизительно на 236.

Если ограничиться более скромным округлением — до числа 9400 (как следует согласно правилам В. Брадиса), то средняя дополнительная погрешность от округления будет значительно меньше, именно 3,4.

Можно, конечно, указать еще и другие критерии для оценки влияний округления на погрешность результата. Но и сказанного достаточно, чтобы сделать такой вывод:

Округление результата действий над приближенными числами имеет свои выгоды и *невыгоды*. Выгоды округления в том, что оно заменяет сложное число, полученное в результате некоторого действия, *более простым*, с которым легче оперировать, а также в том, что оно разрушает иллюзию *чрезмерной точности* результата, т.-е. такой точности, которой *на самом деле нет*. Невыгода же его в том, что оно *в большинстве случаев* увеличивает погрешность результата [1]).

Педагог, который будет всегда помнить об этом двояком — выгодном и невыгодном — значении округления, избежит в своем преподавании тех неверных доводов в пользу округления, на которые я выше указал.

Ленинград.

О. Вольберг.

---

[1]) См. мою статью «Влияние округления на распределение погрешностей». «Известия Тверского педагог. инст.», вып. V, 1929 г.